J. 16 1269

UHCE 654

SESSION 2016

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet commun : ENS Ulm – Lyon – Cachan – ENSAE – ENSAI

DURÉE : 4 heures

L'énoncé comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Tournez la page S.V.P.

Les deux exercices et le problème qui suivent sont indépendants et peuvent donc être abordés dans un ordre laissé au libre choix.

Dans l'ensemble du sujet, pour répondre à une question, on pourra admettre les résultats des questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions. Il sera fait grand cas lors de la correction de la clarté, de la concision et de la précision de la rédaction.

Exercice 1.

(1) Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \dfrac{1}{(1-s)^2}. \end{array}$$

(a) Dresser, avec justifications, le tableau de variations de f.

(b) Calculer l'équation de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f en $s = 1/2$.

(c) Représenter sur une même figure Δ et $\mathcal{C}$.

(2) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$(1-s)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} i s^{i-1} \right) = 1 - s^n(1 + n - sn).$$

(3) (a) Montrer que si $|s| \geq 1$, alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} i s^{i-1}$ diverge.

(b) Montrer que si $|s| < 1$, alors la série $\sum_{i=1}^{\infty} i s^{i-1}$ converge et $\sum_{i=1}^{\infty} i s^{i-1} = \dfrac{1}{(1-s)^2}$.

(4) Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

(a) Montrer que $e^{-\lambda X}$ admet une espérance et la calculer.

(b) Montrer que $X e^{-\lambda X}$ admet une espérance et la calculer.

(5) Soit $g : \mathbb{R} \to]-1,1[$ une fonction dérivable.

(a) Montrer que la fonction h définie par $h(s) = \frac{1}{1-g(s)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$h'(s) = \sum_{i=1}^{\infty} i g'(s) g(s)^{i-1}$$

(6) (a) Soit $0 < x < 2$. Montrer que la série $\sum_{i=1}^{\infty} i(1-x)^{2i}$ converge.

(b) Pour $0 < x < 2$, on pose

$$t(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-x)^{2i}.$$

Trouver la limite de $x^2 t(x)$ lorsque $x \to 0$.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

Dans cet exercice, si $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^n$, on notera $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) (a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $\phi(X, X) \geq 0$

(b) Trouver toutes les valeurs de $X \in \mathbb{R}^n$ telles que $\phi(X, X) = 0$.

(c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\phi(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $X = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$).

(2) On fixe $X \in \mathbb{R}^n$ et on considère la fonction

$$\begin{array}{cccc} \psi_X : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & Y & \longmapsto & \phi(X, Y) \end{array}$$

(a) Montrer que ψ_X est une application linéaire.

(b) Quels sont le rang et la dimension du noyau de ψ_X ? Justifiez votre réponse.

(c) On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ définie par $f(X) = \psi_X$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(3) Soient A et B deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(A \cap B)$. Montrer que $A = B$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un autre entier $m \geq 1$, et on considère des sous-ensembles différents $S_1, \ldots, S_m$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ (autrement dit, on suppose que $S_j \neq S_k$ si $j \neq k$). On suppose qu'il existe un entier ℓ avec $1 \leq \ell \leq n$ tel que toutes les intersections $S_j \cap S_k$ avec $j \neq k$ ont le même cardinal ℓ (autrement dit, $\mathrm{Card}(S_j \cap S_k) = \ell$ pour tout $j \neq k$). Le but de cet exercice est de montrer que $m \leq n$.

(4) Montrer que $\mathrm{Card}(S_j) \geq \ell$ pour tout $1 \leq j \leq m$.

On introduit la matrice $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S_j \\ 0 & \text{si } i \notin S_j. \end{cases}$$

Finalement, pour $1 \leq j \leq m$, on note X_j le vecteur de $\mathbb{R}^n$ constitué de la j-ième colonne de A.

Par exemple, si $n = 4$, $m = 3$, $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{1, 2\}$ et $S_3 = \{1, 2, 4\}$, on a $\ell = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(5) (Exemple) On suppose uniquement dans cette question que $n = 4$, $m = 4$, $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{2, 3\}$ et $S_4 = \{2, 4\}$. Que vaut ℓ dans cet exemple ? Donnez la matrice A.

(6) Montrer que pour tout $j \neq k$, on a $\phi(X_j, X_j) \geq \ell$ et $\phi(X_j, X_k) = \ell$.

(7) On suppose que $m > n$.

(a) Montrer que la famille $(X_1, \ldots, X_m)$ est liée.

On fixe dans la suite des nombres réels $r_1, \ldots, r_m$ non tous nuls tels que $r_1 X_1 + \cdots + r_m X_m = 0$.

(b) Montrer que

$$\sum_{j=1}^{m} r_j^2 \phi(X_j, X_j) + 2\ell \sum_{1 \leq j < k \leq m} r_j r_k = 0.$$

(c) En déduire que

$$\sum_{j=1}^{m} r_j^2 (\phi(X_j, X_j) - \ell) + \ell \left(\sum_{j=1}^{m} r_j \right)^2 = 0.$$

(d) Aboutir à une contradiction.

(8) Peut-on avoir $m = n$? Peut-on avoir $m = n$ et $k = n - 1$?

Problème. Dans ce problème, si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x. Ainsi, on a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Première partie. Les cinq questions de cette partie sont indépendantes.

(1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

(2) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $n^2 \leq n^3 - (n-1)^3$. En déduire que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 \leq n^3$.

(3) Montrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

(4) Soit $x \in \mathbb{R}$. Quelle est la limite de $\lfloor nx \rfloor / n$ lorsque $n \to \infty$? Justifiez votre réponse.

(5) Soit R une variable aléatoire sur $\mathbb{R}_+$ dont la densité est donnée par la fonction $x \mapsto xe^{-x^2/2}$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(R \geq u)$ pour $u \geq 0$.

(b) Est-ce que R admet une espérance ? Justifiez votre réponse. Si oui, la calculer.

Indication. On pourra utiliser la valeur de la variance d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Deuxième partie. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère une variable aléatoire Z_n qui est uniformément répartie sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Les questions (6), (7) et (8) sont indépendantes entre elles.

(6) Montrer que Z_n admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Z_n]$. Justifiez votre réponse.

(7) Montrer que $\cos(\pi Z_n)$ admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[\cos(\pi Z_n)]$.

(8) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de $\mathbb{P}(Z_n \leq xn)$ lorsque $n \to \infty$.

Troisième partie. Soit $u > 0$ un nombre réel.

(9) Trouver la limite de

$$\frac{1}{d} \sum_{i=0}^{\lfloor u\sqrt{d} \rfloor} i$$

lorsque $d \to \infty$. Justifiez votre réponse.

(10) En utilisant la question (3), montrer qu'il existe une fonction $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\ln(1+x) = x + x^2 f(x)$ pour tout $x > -1$ et telle que f soit continue sur $[-1/2, 0]$.

(11) (a) Montrer que pour tous entiers $d > 4u^2$ et $0 \leq i \leq \lfloor u\sqrt{d} \rfloor$ on a $i/d \leq 1/2$. En déduire qu'il existe $M > 0$ tel que pour tous entiers $d > 4u^2$ et $0 \leq i \leq \lfloor u\sqrt{d} \rfloor$ on a $|f(-i/d)| \leq M$.

(b) Trouver la limite de

$$\sum_{i=0}^{\lfloor u\sqrt{d} \rfloor} \ln\left(1 - \frac{i}{d}\right)$$

lorsque $d \to \infty$.

Quatrième partie. Soit $d \geq 1$ un entier. Soit $U_1, U_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, d\}$. On considère la variable aléatoire

$$N_d = \min\{i \geq 1 \; ; \; U_i \in \{U_1, U_2, \ldots, U_{i-1}\}\}.$$

(12) Montrer que $\mathbb{P}(N_d > n) = \left(1 - \frac{1}{d}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{d}\right)$ pour tout entier $2 \leq n \leq d$.

(13) Soit $u > 0$. Montrer que lorsque $d \to \infty$, $\mathbb{P}(N_d/\sqrt{d} > u)$ converge vers $\mathbb{P}(R \geq u)$, où R est la variable aléatoire introduite à la question (5).

(14) En admettant que $\mathbb{E}[N_d] = \sum_{i=0}^{d} \mathbb{P}(N_d > i)$, montrer que

$$\mathbb{E}[N_d] = \int_0^\infty e^{-t} \left(1 + \frac{t}{d}\right)^d \mathrm{d}t.$$

Indication. On pourra développer la quantité $(1 + t/d)^d$ en utilisant la formule du binôme de Newton, et admettre que $\int_0^\infty t^k e^{-t} \, \mathrm{d}t = k!$ pour tout entier $k \geq 0$.

(15) Trouver la limite de $\mathbb{E}[N_d] / \sqrt{d}$ lorsque $d \to \infty$.